从两道与阿波罗尼斯圆有关的试题谈起

曾 伟，吕永斌

(江西省永丰中学，江西 吉安 331500)

众所周知，平面内到两定点的距离之比为一个常数 $\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆，并且称为阿波罗尼斯圆. 自然的我们也许会思考：如果给定具体的一个圆，那么能否找到两个定点及相应的常数 λ？这是一个有趣的问题. 笔者将结合最近教学中碰到的两道与阿波罗尼斯圆有关的试题，尝试对该问题做部分解答.

1 比值常数给定，找两定点

试题 1 在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-2,0)$，$B(4,0)$，点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{1}{2}$. 设点 P 的轨迹为 C，则下列结论错误的是( ).

(A) C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$

(B) 在 x 轴上存在异于 A，B 的两定点 D，E，使得 $\dfrac{|PD|}{|PE|}=\dfrac{1}{2}$

(C) 当 A，B，P 三点不共线时，射线 PO 是 $\angle APB$ 的平分线

(D) 在 C 上存在点 M，使得 $|MO|=2|MA|$

解答 设点 $P(x,y)$，则 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}$. 化简整理可得 $(x+4)^2+y^2=16$，故 A 正确；当 $D(-6,0)$，$E(-12,0)$ 时，$\dfrac{|PD|}{|PE|}=\dfrac{1}{2}$，故 B 正确；当 A，B，P 三点不共线时，在 $\triangle APB$ 中，$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|AO|}{|BO|}=\dfrac{1}{2}$，由平面几何内角平分线的性质知 PO 是 $\angle APB$ 的平分线，故 C 正确；对于 D 选项，假设 $M(x_0,y_0)$，由 $|MO|=2|MA|$ 整理可得 $3x_0^2+3y_0^2+16x_0+16=0$，又点 M 在圆上，故满足 $x_0^2+y_0^2+8x_0=0$，联立解得 $x_0=2$，y_0 无实数解，故 (D) 错误.

思考与拓展 我们特别注意 (B) 选项实际上是阿波罗尼斯圆的一类反问题，即比值给定，找两定点. 具体地，已知圆的方程为 $(x+4)^2+y^2=16$，P 为圆上任意一点，在 x 轴上能否找到异于 $A(-2,0)$，$B(4,0)$ 的两点 D，E，满足 $\dfrac{|PD|}{|PE|}=\dfrac{1}{2}$？如图 1 所示.

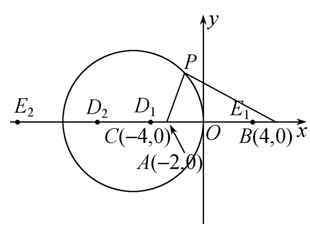

图 1

不妨假设 $D(a,0)$，$E(b,0)$ 满足条件，则有 $\dfrac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-b)^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}$，整理化简可得 $x^2+y^2+\dfrac{2b-8a}{3}x+\dfrac{4a^2-b^2}{3}=0$，另一方面结合 $x^2+y^2+8x=0$ 可得 $\begin{cases}\dfrac{2b-8a}{3}=8,\\4a^2-b^2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-6,\\b=-12,\end{cases}$ 因此在 x 轴上满足条件且异于 $A(-2,0)$，$B(4,0)$ 有且仅有 $D(-6,0)$，$E(-12,0)$. 也许有同学发现 $|CA||CB|=$

基金项目：江西省基础教育研究课题“高考数学试题中核心素养的考查方式及其对高三数学复习教学的导向研究”(JASX2020－510)

$|CD|\cdot|CE|=r^2=16$.确实 A,B 和 D,E 是关于圆 C 的两组反演点！结合文[1]中的定理 1 我们给出如下重要的结论：

结论 1 已知圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，P 为圆 C 上任意一点，对于任意常数 $\lambda(\lambda>0,\lambda\neq1)$，则在过圆心的直线上有且仅有两组点 $\{A,B\}$ 和 $\{D,E\}$，满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\dfrac{|PD|}{|PE|}=\lambda$，并且 $\{A,B\}$ 和 $\{D,E\}$ 都是圆 C 的反演点(即有 $|CA||CB|=|CD||CE|=r^2$).

2 给出一个定点，找另一定点及比值常数

试题 2 已知圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=9$，设点 A 在圆 C 上运动，点 $B(7,6)$，且点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，记点 M 的轨迹为 Γ.

(1)求 Γ 的方程，并说明 Γ 是什么图形；

(2)试探究：在直线 l：$x-y=0$ 上是否存在定点 T(异于原点 O)，使得对于 Γ 上任意一点 P，都有 $\dfrac{|PO|}{|PT|}$ 为一常数，若存在，求出所有满足条件的点 T 的坐标，若不存在，说明理由.

解答 (1)假设 $M(x,y)$，则有 $\overrightarrow{AM}=(x-x_A,y-y_A)$，$\overrightarrow{MB}=(7-x,6-y)$，所以 $\begin{cases}x_A=3x-14,\\y_A=3y-12,\end{cases}$ 因为点 A 在圆 C 上运动，所以：$(3x-14-1)^2+(3y-12-3)^2=9$.即 $(x-5)^2+(y-5)^2=1$.因此点 M 的轨迹方程为 $(x-5)^2+(y-5)^2=1$，它是一个以 $(5,5)$ 为圆心，以 1 为半径的圆.

(2)假设存在一点 $D(t,t)$ 满足 $\dfrac{|PO|}{|PT|}=\lambda$(其中 λ 为常数)，设 $P(x,y)$，则：$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-t)^2+(y-t)^2}}=\lambda$，整理化简得 $x^2+y^2=\lambda^2(x^2-2tx+t^2+y^2-2ty+t^2)$.

因为 P 在 Γ 上，所以 $(x-5)^2+(y-5)^2=1$，化简得 $x^2+y^2=10x+10y-49$.

所以 $10x+10y-49=\lambda^2(10x+10y-49-2tx-2ty+2t^2)$，整理可得

$(10-10\lambda^2+2t\lambda^2)x+(10-10\lambda^2+2t\lambda^2)y-49+49\lambda^2-2\lambda^2t^2=0$.

所以 $\begin{cases}10-10\lambda^2+2t\lambda^2=0,\\49\lambda^2-2\lambda^2t^2-49=0,\end{cases}$ 解得 $t=\dfrac{49}{10}$，因此存在 $D(\dfrac{49}{10},\dfrac{49}{10})$ 满足条件.

思考与拓展 第一问用相关点法求轨迹方程，是同学们所熟悉的.我们特别留心第二问实际上是阿波罗尼斯圆的另一类反问题，即给出一个定点，找另一定点及比值常数.具体地已知圆 Γ 的方程 $(x-5)^2+(y-5)^2=1$ 和过圆心的直线 l：$x-y=0$ 上的一点 $O(0,0)$，要找直线 l 上的另一点 T 及一个常数 λ，使得对于圆上任意一点 P，都有 $\dfrac{|PO|}{|PT|}=\lambda$. 如图 2 所示.

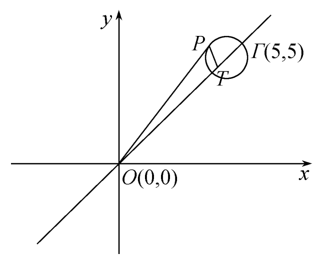

图 2

设 $T(t,t)(t<5)$，则 $\{O,T\}$ 为圆 Γ 的一组反演点，所以 $|\Gamma T|\cdot|\Gamma O|=r^2$，有 $|\Gamma T|=\dfrac{1}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ 即 $\sqrt{2}(5-t)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，因此，$t=\dfrac{49}{10}$，即得到 $D(\dfrac{49}{10},\dfrac{49}{10})$，且此时 $\lambda=\dfrac{|NO|}{|NT|}=5\sqrt{2}$，其中 $N(5-\dfrac{\sqrt{2}}{2},5-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 为 l 与圆 Γ 的一个交点(也是直径的一个端点).经过以上的分析，我们给出解决这类反问题的一个结论：

结论 2 已知圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，P 为圆 C 上任意一点，给定过圆心的直线上任意点 A(该点异于圆心 C 且不为直线与圆的交点 M,N)，

(下转第 29 页)

待定系数法在解数学竞赛题中的运用

方志平

(广东省惠州市第一中学，广东 惠州 516007)

待定系数法是数学竞赛中常见的解题方法,也是重要的数学通法，借用待定系数法解题，关键是明确代数式的基本模式,然后经过变形与比较,建立起含有待定系数的方程或方程组.本文将结合几道具体的数学竞赛题,阐述待定系数法的运用.

1 在多项式问题中的运用

例1 (2019年全国高中数学联赛山东省预赛试题)整数 n 使得多项式 $f(x)=3x^3-nx-n-2$，可以表示为两个非常数整系数多项式的乘积,所有 n 的可能值的和为________.

解 设 $f(x)=(ax^2+bx+c)(dx+e)$，其中 a、b、c、d、e 均为整数,且不妨设 $a=1$，$d=3$ 或 $a=3$，$d=1$.

若 $a=1$，$d=3$，则

$f(x)=(x^2+bx+c)(3x+e)$，

一方面有 $f(-\frac{e}{3})=0$，

于是 $e^3=3(ne-3n-6)$，得 $3|e$；

另一方面,当取 $x=-1$ 时,有

$-5=f(-1)=(1-b+c)(-3+e)$.

所以 $(-3+e)|(-5)$，

得 $e=-2,2,4,8$；矛盾.

若 $a=3$，$d=1$，则

$f(x)=(3x^2+bx+c)(x+e)$，

一方面有 $f(-e)=0$，

于是 $3e^3-ne+n+2=0$，

即 $n=\frac{3e^3+2}{e-1}$；

另一方面,当取 $x=-1$ 时，有

$-5=f(-1)=(3-b+c)(e-1)$，

所以 $(e-1)|(-5)$，得 $e=-4,0,2,6$；

将这四个数代入 $n=\frac{3e^3+2}{e-1}$，得 n 的值为 38，-2，26，130.所求之和为192.

2 在函数式问题中的运用

例2 (2019年全国高中数学联赛福建省预赛试题)已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ 的图象关于点(2,0)对称,则 $f(1)=$________.

(下转第30页)

(上接第28页)

那么在该直线上一定存在唯一的另一点 B 及一个常数 λ，满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\lambda$ $(\lambda=\frac{|MA|}{|MB|}=\frac{|NA|}{|NB|})$.

对结论1和结论2的证明都可先考虑特殊圆 $x^2+y^2=r^2$ 及过原点的直线,然后将其一般化,结论2的证明与文[1}中定理1的证明相似,请同学们自行理解补充完善.

我们给出了与阿波罗尼斯圆相关的两类反问题,对其存在性和唯一性都做了较细致的分析与阐述,希望通过本文,同学们对阿波罗尼斯圆有更深刻的理解.

参考文献

[1] 杨炼. 阿波罗尼斯圆的新性质及应用[J]. 中学数学杂志，2016，5:31.

(责审 韩乐琴)